矩阵树定理的简单证明

# 相关引理

## 自定义的矩阵定理

### 基本定义

设一张图G[[1]](#footnote-1)的边集为{Edge[k]}。不妨设一个矩阵M(G),其中任意一个元素a[i][j]满足如下性质：

。

### 定理内容

矩阵M的行列式满足以下性质：[[2]](#footnote-2)

### 定理证明

参见：[《生成树的计数及其应用》](https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnx0aXp6eWR1YmJ8Z3g6NTAyMTNlZmQwZjQ3NDBjMQ)[[3]](#footnote-3)

## Cauchy–Binet 定理

## 定理内容



## 定理证明

参见：[Wikipedia - Cauchy–Binet formula](https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Binet_formula)[[4]](#footnote-4)

# 矩阵树定理的证明

## 第一部分 · 公式的推导

设G的所有不同的生成树的个数=，不难发现：



由，可得：



由Cauchy–Binet 定理可得：



## 第二部分 · 公式的优化[[5]](#footnote-5)

观察，不难发现L中每一个元素满足以下性质



换一句话说，我们可以不构造M(G)而直接构造L，而矩阵L的大小与边数无关，所以我们就把时间复杂度优化到了与边数无关的地步。

# 参考文献

1）[《生成树的计数及其应用》](https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnx0aXp6eWR1YmJ8Z3g6NTAyMTNlZmQwZjQ3NDBjMQ) 周东

2）[《基尔霍夫定理》](http://vfleaking.blog.163.com/blog/static/1748076342013112523651955/) 吕凯风

# 后记

本文基本上取自参考文献中提到的两篇文章，或者说：本文就是那两篇文章的摘要。

因为矩阵树定理的证明需要扎实的数学知识，然而我并不具备这样的基础，所以在了解到上述文章的证明存在不严密之处我也不能予以更正。这也是为什么本文的主要推导过程中也存在不严密之处。[[6]](#footnote-6)

不过本文的目的不是严格证明矩阵数定理，而是稍微了解矩阵树定理的原理，进而能够掌握某些关于矩阵数定理的变形的题目，所以我也不愿在严密的证明上花费太多的时间。[[7]](#footnote-7)

1. 特别要求：有n个点，n-1 条边 [↑](#footnote-ref-1)
2. 即：若这张图是一棵树则为1，否则为0 [↑](#footnote-ref-2)
3. 我也尝试过证明，但因为难度过大，所以没有成功，故只能引用周冬的论文 [↑](#footnote-ref-3)
4. 中文证明的话，我们可以召唤VFK：[http://vfleaking.blog.163.com/blog/](http://vfleaking.blog.163.com/blog/static/1748076342013112523651955/) [↑](#footnote-ref-4)
5. 上述的式子已经可以在较优的时间复杂度内求解了，但其复杂度不仅与点数有关，还与边数有关。这使得其在密集图中的表现不尽人意，所以我们要优化。 [↑](#footnote-ref-5)
6. 比如G与G’无故被替换 [↑](#footnote-ref-6)
7. 严密的证明似乎可以在MIT的这篇论文中找到：[http://web.mit.edu/](https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0ahUKEwj40quH0M_OAhXElZQKHYNGApQQFggsMAE&url=http%3A%2F%2Focw.mit.edu%2Fcourses%2Fmathematics%2F18-314-combinatorial-analysis-fall-2014%2Freadings%2FMIT18_314F14_mt.pdf&usg=AFQjCNGhFenMW8iQIjmL4jLlmLIqotH0Rg&sig2=AKJ1Z7k4eWDJCkJAE0myqQ) [↑](#footnote-ref-7)