弦图的计数问题

Ⅰ. 最小色数染色

一. 引理：最少色数 = 团数[1][2]

二. 算法实现：

- 由上述定理可知，我们只需要按照完美消除序列倒着染即可。所以现在唯一的问题即是如何得完美消除序列。
- 求取完美消除序列主要有两种方法：MCS 和 LexBFS[3]
- MCS：每一次选择与已选择子图连边最多的点加入子图中

三. 参考代码：http://paste.ubuntu.com/17973577/[4]

Ⅱ. 染色方案数

一. 引理[5]：

- 单纯点：设 N(v)表示与点 v 相邻的点集。一个点称为单纯点当{v} + N(v)的诱导子图为一个团。
- 完美消除序列定义：一个点的序列(每个点出现且恰好出现一次)v1, v2, …, vn 满足 vi 在{vi, vi+1,…,vn}的诱导子图中为一个单纯点。

二. 结论：弦图的染色方案数可以直接用完美消除序列倒着跑一遍求出

三. 证明[6]：

类比增连构造数据结构。

---

[1] 证明见陈丹琦论文：http://wenku.baidu.com/view/07f4be196c175f0e7cd13784.html?re=view
[2] 我觉得陈丹琦的证明有一点问题，但结论却很显然是正确的，可以尝试看看下文的“染色方案数”来意会一下
[3] 个人比较喜欢 MCS，所以仅介绍 MCS
[4] 对应题目：http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1006
[5] 证明见脚注 1 中提到的论文
[6] 此证明原创，表述如有不清晰之处，请谅解

假设我们已经求出了完美消除序列第 1~(n−1)个点的染色方案数 a[7]，现在来处理第 n 个点。

由引理 1、2 得 1−（n−1）中的点，与 n 直接相连的点的集合{P}连同 n 点，组成了一个团。所以{P}也是一个团，所以{P}中的点颜色一定两两不同。假设颜色上限是 c，则第 n 个点有(c−|P|[8])种染色方案。又因为加入 n 后，对于 1~(n−1)的方案数无影响，所以由乘法原理可得，1~n 的方案数为 a*(c−|P|)。由数学归纳法可得，当 n＝N 时，我们就已经求得了所求

四. 代码参考：http://paste.ubuntu.com/18009016/[9]

[7] 总共 N 个点

[8] {P}中点的个数

[9] 配套题目：http://begin.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3026