浅谈一类 gcd()问题的求解

Ⅰ. 目录:

Ⅱ. 求解 $\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d}[\gcd(i,j)==?]$

一. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\gcd(i,j)==1]$

题设即为 1−n 中互质的数的个数。说到互质，自然就想到了 $\varphi(x)$。

实际上来说，这题也是可以用 $\varphi(x)$ 来做的。

结论： $\text{原式} = -1 + 2\bullet\sum_{i=1}^{n}\varphi(\mathrm{i})$

证明： 考虑一对互素的数对(a,b)，其中 a<b

根据欧拉函数的定义不难发现，其一定在且仅在统计 $\varphi(a)$ 的时候被计算过一次。有(b,a)也应考虑在内，所以要翻倍。再因(1,1)只算一组，所以要减一

具体做法：线筛出欧拉函数[1]后，求其前缀和，之后直接输出即可

相关例题：http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2190

代码参考：http://paste.ubuntu.com/20321438/

二. $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}[\gcd(i,j)==k]$

相较于上一个问题，这个问题中 i,j 的上限不同，且 gcd(i,j) != 1。

第一个不同点，直接否定了欧拉函数的应用，于是我们只能另辟蹊径

结论： $\text{原式} = \sum_{d=1}^{\min(\frac{a}{k},\frac{b}{k})}\mu(d)\left\lfloor\frac{a}{d\cdot k}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{d\cdot k}\right\rfloor$

证明：

---

[1] 参考本博客稍早发表的文章 :《线性筛与线性递推》

$$原式=\sum_{i=1}^{\frac{a}{k}}\sum_{j=1}^{\frac{b}{k}}[\gcd(i,j)==1]=\sum_{i=1}^{\frac{a}{k}}\sum_{j=1}^{\frac{b}{k}}\sum_{d|\gcd(i,j)}\mu(d)=\sum_{d=1}^{\min(\frac{a}{k},\frac{b}{k})}\mu(d)\sum_{i=1}^{\frac{a}{k}}\sum_{j=1}^{\frac{b}{k}}\sum_{d|i}\sum_{d|j}1=\sum_{d=1}^{\min(\frac{a}{k},\frac{b}{k})}\mu(d)\left\lfloor\frac{a}{d\cdot k}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{d\cdot k}\right\rfloor$$

具体做法：不难得出结论：$\left\lfloor\frac{a}{d\cdot k}\right\rfloor$只有 sqrt(a)种取值，所以我们线筛出莫比乌斯函数后，分块处理即可

相关例题：http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1101

代码参考：http://paste.ubuntu.com/20323791/

三. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[is\_prime(\gcd(i,j))]$

相较于上一个问题，这个问题中对于 gcd(i,j)的限制，从等于定值，变成了等于素数这么思考的话，枚举素数，将其转化为上一种问题的解决方案就呼之欲出了

相关例题：http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2818

代码参考：http://paste.ubuntu.com/20324465/

四. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[is\_prime(\gcd(i,j))]$(多组询问)

相较于上一个问题，这个问题唯一的不同在于增加了“多组询问”，这直接导致了上题的时间复杂度不能被接受。

结论：$原式=\sum_{D=1}^{\min(n,m)}\sum_{p|D}\mu(\frac{D}{p})\left\lfloor\frac{n}{D}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{D}\right\rfloor$,其中$\sum_{p|D}\mu(\frac{D}{p})$可以线筛

证明：前面推式子的正确性，脑补一下很正确的样子，略。[2]

由狄利克雷(Dirichlet)卷积[3]得：$\sum_{p|D}\mu(\frac{D}{p})$是积性函数，所以可以线筛

具体做法：线筛 $\mu(x)$ 的同时，把$\sum_{p|D}\mu(\frac{D}{p})$也给一起筛出来，对于单次询问，只要sqrt(n)分块即可。总时间复杂度 O(n+sqrt(n)*T)，可以接受。

相关例题：http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2820

代码参考：http://paste.ubuntu.com/20327973/

五. $\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d}[\gcd(i,j)==k]$

相较于“问题二”，该问题只是对 i，j 做了下界的限制。

具体做法：可以使用容斥原理，也可以在分块的时候考虑下界

相关例题：http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2301

代码参考：http://paste.ubuntu.com/20328414/

[2] 现在是晚上一点过，想睡觉了，要证还是很简单，但懒得写 latex 了 QAQ

[3] 可参考：http://techotaku.lofter.com/post/4856f0_634219b

六. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[\gcd(i,j,k)==1]$[4]

这题之前以为必须用莫比乌斯反演，后来发现可以直接上莫比乌斯函数

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[\gcd(i,j,k)=1]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{d|\gcd(i,j,k)}\mu(d)=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\cdot\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^{3}$$

相关例题：http://www.spoj.com/problems/VLATTICE/
代码参考：http://paste.ubuntu.com/20332076/

Ⅲ. 求解 $\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d}\gcd(i,j)$

一. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gcd(i,j)$

不难想到，枚举 gcd(i，j)，然后类比Ⅱ中的问题 2，求互质的数对的个数即可
但这样的时间复杂度为 O(n^1.5)，我们还可以做得更优。

结论： 原式 $=\sum_{D=1}^{\min(n,m)}\varphi(D)\left\lfloor\frac{n}{D}\right\rfloor^{2}$

证明[5]：

$$\varphi(n)=\sum_{i=1}^{n}[\gcd(i,n)==1]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|n}\mu(d)\cdot\sum_{i=1}^{n}[\gcd(i,n)==i]=\sum_{d|n}\mu(d)\cdot\frac{n}{d}$$

具体做法：线筛出莫比乌斯函数后，sqrt(n)分块即可
相关例题：http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2005
代码参考：http://paste.ubuntu.com/20330351/

二. $\sum_{i=1}^{n}\gcd(1,n)$

暴力枚举 gcd()的做法十分显然，但我们可以做的更优
不难发现，因为 n 为定值,所以 gcd(i,n)最多只会有 sqrt(n)种取值

计算欧拉函数的时候，数据可能过大数组开不下，所以只能花 sqrt(n)求 $\varphi(n)$

总时间复杂度看似 O(n)但因为因数个数并非严格 sqrt(n)[6],而是远小于这个值。故此上界很松
参考题目：http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2705
代码参考：http://paste.ubuntu.com/20331325/

Ⅳ. Reference：

[4] UPD 2016.9.21：这题可以用问题 1 的解法进行求解，完全不需要莫比乌斯反演

[6] 参见 vfk 的 blog：http://vfleaking.blog.163.com/blog/static/174807634201341913040467/

一. 某大牛的 blog：https://oi.abcdabcd987.com/eight-gcd-problems/
二. JCVB 的 blog：http://jcvb.is-programmer.com/posts/41846.html
三. hht 的 blog：http://techotaku.lofter.com/post/4856f0_634219b
四. Vfk 的 blog：http://vfleaking.blog.163.com/174807634201341913040467/