矩阵树定理的简单证明

相关引理

自定义的矩阵定理

基本定义

设一张图 G[1]的边集为{Edge[k]}。不妨设一个矩阵 M(G),

其中任意一个元素 a[i][j]满足如下性质：

$$a[i][j]=\begin{cases}1, i==Edge[\mathrm{j}].\mathrm{u}\\-1, i==Edge[j].v\\0, otherwise\end{cases}。$$

定理内容

矩阵 M 的行列式满足以下性质： $\det(M)=\begin{cases}1,\text{整张图联通}\\0, otherwise\end{cases}$ [2]

定理证明

参见：《生成树的计数及其应用》[3]

[1] 特别要求：有 n 个点，n-1 条边

[2] 即：若这张图是一棵树则为 1，否则为 0

[3] 我也尝试过证明，但因为难度过大，所以没有成功，故只能引用周冬的论文

Cauchy－Binet 定理

定理内容

$$\det AB=\begin{cases} 0, & 当p>q时; \\ \det A\det B & 当p=q时; \\ \sum_{1<=j_1<\cdots<j_p<=q} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ 1 & 2 & \cdots & p\end{pmatrix} & 当p<q时。\end{cases}$$

定理证明

参见：Wikipedia – Cauchy－Binet formula[4]

矩阵树定理的证明

第一部分 · 公式的推导

设 G 的所有不同的生成树的个数=∂，不难发现：

$$\partial=\sum_{G'是G的子图}\det(M(G'))^2$$

由 $\det(A)=\det(A^T)$，可得：

$$\partial=\sum_{G'是G的子图}\det(M(G'))\bullet\det(M(G')^T)$$

由 Cauchy－Binet 定理可得：

$$\partial=\det(M(G)\bullet M(G)^T)$$

[4] 中文证明的话，我们可以召唤 VFK：http://vfleaking.blog.163.com/blog/

第二部分 · 公式的优化[5]

观察$L=M(G)\bullet M(G)^T$，不难发现L中每一个元素满足以下性质

$$L[i][j]=\begin{cases}P_i\text{的度数},i==j\\ -1\cdot P_i\text{与}P_j\text{间边的数量},i!=j\end{cases}$$

换一句话说，我们可以不构造M(G)而直接构造L，而矩阵L的大小与边数无关，所以我们就把时间复杂度优化到了与边数无关的地步。

参考文献

1)《生成树的计数及其应用》 周东

2)《基尔霍夫定理》 吕凯风

后记

本文基本上取自参考文献中提到的两篇文章，或者说：本文就是那两篇文章的摘要。

因为矩阵树定理的证明需要扎实的数学知识，然而我并不具备这样的基础，所以在了解到上述文章的证明存在不严密之处我也不能予以更正。这也是为什么本文的主要推导过程

[5] 上述的式子已经可以在较优的时间复杂度内求解了，但其复杂度不仅与点数有关，还与边数有关。这使得其在密集图中的表现不尽人意，所以我们要优化。

中也存在不严密之处。[6]

不过本文的目的不是严格证明矩阵数定理，而是稍微了解矩阵树定理的原理，进而能够掌握某些关于矩阵数定理的变形的题目，所以我也不愿在严密的证明上花费太多的时间。[7]

[6] 比如 G 与 G'无故被替换

[7] 严密的证明似乎可以在 MIT 的这篇论文中找到：http://web.mit.edu/