组合游戏略述
——浅谈 SG 游戏的若干拓展及变形

石家庄二中 贾志豪

前言

组合游戏是近几年新兴起的博弈游戏，随着张一飞学长关于组合游戏的论文的面世，组合游戏问题开始在国内信息学竞赛这片沃土上生根发芽，与大家一起成长、成熟、成才。最为马上要离开高中信息学舞台的高三学生，我一直希望能为学弟学妹们留下一些我自己的心得，于是这篇论文应运而生!!!

这篇论文的一些思想是我早在一年前节开始构思的，感谢计算机学会为我提供这样一个舞台，能让我的论文为更多的人所知道；同时感谢在我写论文时无私帮助过我的所有人，谢谢你们!!!

先介绍一下论文的主要内容：第一章作为论文的理论基础，主要从欣赏的角度引入了 SG 函数、游戏图、NIM 游戏等概念，重点谈我对组合游戏尤其是 SG 函数的体会、理解；第二章主要介绍了几种不同规则的组合游戏以及相应的应对策略，旨在告诉读者，游戏规则变化之后，我们应该如何去分析新的规则、解决新的模型；第三章主要介绍了几种竞赛中常见的组合模型，并将“她”们成功的转化成了 NIM 模型。

鉴于这篇论文的内容较多，在这里给读者提供一些阅读建议：第一章由于篇幅原因，并没有给出 SG 函数、NIM 游戏解法的详细证明过程，对于刚刚接触组合游戏的读者，建议先阅读一些关于 SG 函数的资料（张一飞关于博弈游戏的论文[1]、王晓柯关于组合游戏的论文[2]就很不错），然后再从论文的第一章看起，相信你一定会很有收获；第二、三章是论文的重头戏，如题目所言，分别谈 SG 游戏的拓展和变形，对于钟情于组合游戏的读者，可以重点看一看第三章，相信一定不会让你失望!!!

这篇论文主要有两个特点：

- 基本没有例题但处处是例子。为了让读者更好的理解论文中的思想，笔者在选题目的时候刻意将题目的背景剥掉，只剩下一个“光溜溜”的数学模型，这样读者在阅读论文时，就不必花精力去考虑背景向模型的转化，可以全身心去理解笔者想要传达的思想。但读者不必去担心没有地方练习，笔者将这几年的自己做过的组合游戏题收录在了论文的附录里。

[1]《由感性认识到理性认识——透析一类搏弈游戏的解答过程 》，张一飞，国家集训队 2002 论文
[2]《解析一类组合游戏》，.王晓珂，国家集训队 2007 论文

- 每一个模型都有详细的证明。大多数人在学习信息学时存在的问题是“知其然，不知其所以然”，因为大多数的比赛模式是只要求结果而不要求过程。但这会使我们对一个事物“只知表皮，不知深髓”，如果将一个我们知道的问题稍加变形的话，我们可能就不会了。这个问题在组合游戏中体现得尤其突出。因此笔者对于文中的每一个定理都给出了证明，希望读者对文中的思想“知其然，知其所以然”。

为了方便大家阅读，我将论文中所有的定理表述做成了“HELLO WORLD”将所有的定义表述做成了“HELLO WORLD”，希望这样的改动能引起大家的注意和兴趣。

目录

感谢..4
Chapter 1...5
1.1 本论文讨论的范围...5
1.2 组合游戏中状态空间向图的转化.....................................6
1.3 简介 SG 函数...6
1.4 定义 NIM-模型..7
Chapter 2...9
2.1 走完最后一步者输——Anti-SG 游戏和 SJ 定理....................9
2.2 可以将一堆石子分成多堆——Multi-SG 游戏 14
2.3 每一个可以移动的棋子都要移动——Every-SG 游戏 14
Chapter 3...18
3.1 翻硬币游戏 18
3.2 无向图删边游戏 19
3.2.1 树的删边游戏 19
3.2.2 Christmas Game(PKU3710)..21
3.2.3 无向图的删边游戏 23
参考资料 24
附录 24

关键字

SG 函数	NIM 模型	Anti 游戏
Multi 游戏	Every 游戏	翻硬币游戏
删边游戏	证明	拓展

感谢

谨以此论文献给：

- 我的初中同班同学，集训队队员，对 ppt 内容提出宝贵意见的李骥扬同学
- 我的高中同班同学，集训队队员，给论文指出多处缺点的武森同学
- 我的学长，北京大学学生，认真修改过我论文 ppt 的周先达同学
- 我的学长，复旦大学学生，认真阅读过论文修订版的杨敏达同学
- 在我生病时送我去医院，认真辅导我信息学的韩日旺老师
- 在我上高一时及时指出我的缺点，辛勤辅导我信息学的李晶老师
- 与我交流论文内容的唐文斌、胡伟栋教练

向以上所有人表示我最诚挚的谢意！！！

谢谢所有在我信息学道路上对我有帮助的人！！！

● Chapter 1

1.1 本论文讨论的范围

本论文主要讨论一类组合游戏问题的解法，这列问题具有如下特征：

- 游戏有两个人参与，二者轮流做出决策。且这两个人的决策都对自己最有利。
- 当有一人无法做出决策时游戏结束，无法做出决策的人输。无论二者如何做出决策，游戏可以在有限步内结束。
- 游戏中的同一个状态不可能多次抵达。且游戏不会有平局出现。
- 任意一个游戏者在某一确定状态可以作出的决策集合只与当前的状态有关，而与游戏者无关。

这样一类游戏可以用 SG 函数解决，我们将其称之为 SG-组合游戏。

对“最有利”的解释：本文所说的最有利，是指对于当前要做出决策的游戏者，如果他存在一种决策，使得后手进入到一个无论怎样做出决策都一定会输的的状态，那么结局一定是当前的游戏者胜！

中国有句古话——“智者千虑，必有一失”，而组合游戏中的游戏者却可以做到“运筹帷幄，决胜千里”。不得不说，正是组合游戏中的“智者”吸引着我们去探索、发觉组合游戏中的魅力！

1.2 组合游戏中状态空间向图的转化

我们可以将组合游戏中的每一个状态抽象成图中的一个点，将每一步决策抽象成图中的一条边。我们将这个图称为该组合游戏的*游戏图*。

这样，对于组合游戏中的每一次对弈，我们都可以将其抽象成游戏图中的一条从某一顶点到出度为 0 的点的路径。

组合游戏向图的转化，并不单单只是为了寻找一种对应关系，它可

以帮助我们淡化游戏的实际背景，强化游戏的数学模型，更加突出游戏的数学本质！

1.3 简介 SG 函数

SG 函数是对游戏图中每一个节点的评估函数。它的定义如下：

$$f(v)=mex\{f(u)\,|\,\text{图中有一条从}v\text{到}u\text{的边}\}$$

其中，mex（minimal excludant）是定义在整数集合上的操作。它的自变量是任意整数集合，函数值是不属于该集合的最小自然数。

$$mex\{\mathrm{A}\}=\min\{k\,|\,k\notin A\wedge k\in N\}$$

事实上，所有的 SG-组合游戏都存在相应的游戏图，我们完全可以根据游戏图的拓扑关系来逐一算出每一个状态点的 SG 函数（事实上我们只需要知道该状态点的 SG 函数值是否为 0）。这样，我们就可以知道对于某一个状态，是先手必胜局还是先手必败局。这是不是说明我们已经将 SG-组合游戏完满解决了呢？

显然不是！！！

因为我们不光要考虑算法的正确性，还要考虑算法的时空开销，而上述方法显然没有考虑算法的时空开销，上述方法的瓶颈在于没有充分利用 SG-组合游戏问题的特殊性质。

我们先引出游戏的和的概念。

[定义]

游戏的和：考虑任意多个同时进行的 SG-组合游戏，这些 SG-组合游戏的和是这样一个 SG-组合游戏，在它进行的过程中，游戏者可以任意挑选其中的一个单一游戏进行决策，最终，没有办法进行决策的人输。

■

上述方法在计算 K 个单一 SG-组合游戏的和时，所消耗的时间、空间复杂度是分别计算这 K 个单一 SG-组合游戏所消耗的时间、空间复杂度的乘积。

但如果我们能更好的利用 SG-组合游戏的性质的话，我们可以将上一段的最后一字——“积”——改成“和”。这就是我们继续研究 SG-函数的意义，也是这篇论文的意义所在。

最后我们直接给出 SG 函数的性质：

（1）对于任意的局面，如果它的 SG 值为 0，那么它的任何一个后继局面的 SG 值不为 0；

（2）对于任意的局面，如果它的 SG 值不为 0，那么它一定有一个后继局面的 SG 值为 0。

1.4 定义 NIM-模型

为了不使读者对本篇论文失去兴趣，我特意将介绍取石子游戏的内容换成小字，对这部分内容已经很熟悉的读者可以直接略过。

取石子游戏即著名的 nim 游戏，游戏规则如下：

- 桌子上有 N 堆石子，游戏者轮流取石子。
- 每次只能从一堆中取出任意数目的石子，但不能不取。
- 取走最后一个石子者胜。

这道题每一堆石子的 SG 函数值很显然为该堆石子的数目，根据 SG 函数的特点，最后所有堆石子的 SG 函数的和

$$SG\_tot = SG\_1 \oplus SG\_2 \oplus ... \oplus SG\_n$$

最后，先手胜当且仅当该值为 0。证明从略。

取石子游戏虽然是组合游戏中一道最基础的题目，但是它却代表了一类经典的组合模型。

事实上，每一个简单 SG-组合游戏都可以完全等效成一堆数目为 K 的石子，其中 K 为该简单游戏的 SG 函数值。这样的等效是充要的。

[定理]

在我们每次只能进行一步操作的情况下，对于任何的游戏的和，我们若将其中的任一单一 SG-组合游戏换成数目为它的 SG 值的一堆石子，该单一 SG-组合游戏的规则变成取石子游戏的规则（可以任意取，甚至取完），则游戏的和的胜负情况不变。

这是 SG 函数的基本性质，证明可参阅相关资料。

定理的一个变形是：若只考虑游戏的和，我们可以将其中的任一游戏换成 SG 值相等的其他游戏，游戏的和的 SG 函数值不变。

定理告诉我们，在考虑游戏的和时，每一个单一游戏的具体细节是可以被忽略的，我们所关心的只是 SG 函数值。所以我们可以将组成它的所有子游戏换成相应数目的一堆石子。这样，所有的游戏的和都等价成 nim 游戏。

为了以后论文的方便，我们将以后的所有例题都抽象成 NIM-模型。抽象成 NIM-模型后，剩下的问题就是我们所熟悉的 nim 游戏了。

● Chapter 2

2.1 走完最后一步者输——Anti-SG 游戏和 SJ 定理

在谁走完最后一步谁输时，如何判断输赢？

刚拿到这个问题，大多数人可能会认为要颠覆传统的 SG 函数解法，设计新的评估函数。

我们不妨先从最本质的 nim 游戏寻找突破口。

[定义]（anti-nim 游戏）

- 桌子上有 N 堆石子，游戏者轮流取石子。
- 每次只能从一堆中取出任意数目的石子，但不能不取。
- 取走最后一个石子者败。

[结论]

先手必胜当且仅当：

（1）所有堆的石子数都为 1 且游戏的 SG 值为 0；

（2）有些堆的石子数大于 1 且游戏的 SG 值不为 0。

[证明]

游戏分两种情况：

- 有 N 个堆，每个堆只有一个石子。

  显然，先手必胜当且仅当 N 为偶数。

- 其他情况。

  （1） 当 SG 不为 0 时

  若还有至少两堆石子的数目大于 1，则先手将 SG 值变为 0 即可；若只有一堆石子数大于 1，则先手总可以将状态变为有奇数个 1。所以，当 SG 不为 0 时先手必胜。

（2） 当 SG 为 0 时

至少有两堆石子的数目大于 1，则先手决策完之后，必定至少有一堆的石子数大于 1，且 SG 值不为 0，由上段的论证我们可以发现，此时，无论先手如何决策，都只会将游戏带入先手必胜局，所以先手必败。

■

上述关于 anti-nim 游戏的推导只对 anti-nim 这一简单游戏成立。因为我们在证明 SG 函数性质时，用到了这样一个性质

SG 值为 0 的局面不一定为终止局面。

所以，上述论证能否推广到所有 SG-组合游戏，我们是需要从新给出论证的。

我们现在已经充分了解到了 nim 游戏与 SG 函数之间的内在联系，所以我们很自然的会想到下述命题：

[命题]

先手必胜当且仅当：

（1）所有单一游戏的 SG 值小于 2 且游戏的 SG 值为 0；

（2）存在单一游戏的 SG 值大于 1 且游戏的 SG 值不为 0。

很遗憾，这是一个错命题！

我们考虑图 1 给出的游戏图。

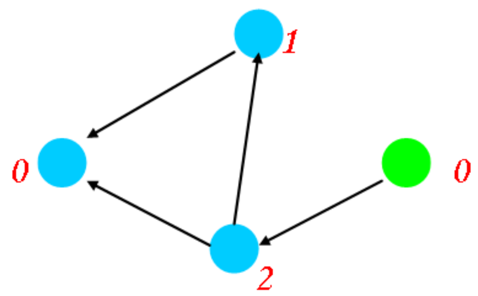


图 1（旁边数字为节点的 SG 值）

最右边的点对应的局面为先手必胜情况中的（1），但聪明的读者可以发现，该情况应对应先手必败！

那么是不是我们对于组合游戏中的 ANTI 情况没有任何办法呢？

不是的！

我们可以总结出 SG 组合游戏中哪些情况会给出反例，然后将该命题适当的做一些修改。我在这里给出适用于 Anti-SG 组合游戏的 SJ 定理（Sprague Grundy——Jia Zhihao 定理）

我们先给出 Anti-SG 游戏的定义：

[定义]

- Anti-SG 游戏规定，决策集合为空的游戏者赢。
- Anti-SG 其他规则与 SG 游戏相同。

[定理]（SJ 定理）

对于任意一个 Anti-SG 游戏，如果我们规定当局面中所有的单一游戏的 SG 值为 0 时，游戏结束，则先手必胜当且仅当：（1）游戏的 SG 函数不为 0 且游戏中某个单一游戏的 SG 函数大于 1；（2）游戏的 SG 函数为 0 且游戏中没有单一游戏的 SG 函数大于 1。

[证明]

我们只需要证明：

（1） 所有的终止局面为先手必胜局。（这一点显然，证明中略去）

（2） 游戏中的任何一个先手必败局一定只能够转移到先手必胜局；

（3） 游戏中的任何一个先手必胜局一定能够转移到至少一个先手必败局。

情况一：局面的 SG 函数为 0 且游戏中某个单一游戏的 SG 函数大于 1。

∵当前局面的 SG 函数值为 0

又∵SG 函数性质（1）

∴它所能转移到的任何一个局面的 SG 函数值不为 0 ①

∵当前局面的 SG 函数值为 0 且游戏中某个单一游戏的 SG 函数大于 1。

∴当前局面中必定至少有 2 个单一游戏的 SG 函数大于 1。

又∵每次至多只能更改一个单一游戏的 SG 值

∴它所能转移到的任何一个局面都至少有一个单一游戏的 SG 值大于 1。 ②

由①②得，情况一所能转移到的任何一个局面都为先手必胜局。

情况二：局面的 SG 函数不为 0 且游戏中没有单一游戏的 SG 函数大于 1。

显然，当前局面一定有奇数个游戏的 SG 函数值为 1，其余游戏的 SG 函数值为 0。

（1） 将某个单一游戏的 SG 值更改为大于 1 的数。

∵转移前没有单一游戏的 SG 值大与 1，转移将某个单一游戏的 SG 值更改为大于 1 的数。

∴转移后的局面一定有且只有一个单一游戏的 SG 值大于 1。 ③

∴后继局面的 SG 值一定不为 0。 ④

由③④得，后继局面一定为先手必胜局。

（2） 将某个单一游戏的 SG 值更改为 0 或 1。

∵转移是将某个 SG 值为 0 的单一游戏改成 SG 值为 1 的单一游戏，或将某个 SG 值为 1 的单一游戏改成 SG 值为 0 的单一游戏。

∴转移后的局面一定有偶数个 SG 值为 1 的单一局面且不含有 SG 值大于 1 的局面。

∴后继局面一定为先手必胜局。

情况三：局面的 SG 函数不为 0 且游戏中某个单一游戏的 SG 函数大于 1。

（1）局面中只有 1 个单一游戏的 SG 值大于 1。

我们选择更改 SG 值最大的单一游戏，我们可以选择将其更改成 0 或 1 来保证转移后的局面有且只有奇数个 SG 值为 1 的单一游戏。

则通过这种方式转以后的局面为先手必败局。

（2）局面中有至少两个单一游戏的 SG 值大于 1。

根据 SG 函数性质（2），总存在一种决策可以将后继局面的 SG 函数值变为 0 ⑤

∵局面中有至少两个单一游戏的 SG 值大于 1

又∵每次最多只能更改一个单一游戏的 SG 值

∴后继局面中至少有一个游戏的 SG 值大于 1 ⑥

由⑤⑥得，后继局面为先手必败局。

情况四：局面的 SG 函数为 0 且游戏中没有单一游戏的 SG 函数大于 1。

当局面中所有单一游戏的 SG 值为 0 时，游戏结束，先手必胜。

否则，局面有且仅有偶数个 SG 值为 1 的单一游戏，其余游戏的 SG 值为 0。

我们只需将其中的某一个 SG 值为 1 的单一游戏的 SG 值变为 0，游戏中即可出现奇数个 SG 值为 1 的单一游戏，到达先手必败局。

综上，证明完毕！

■

实际上，聪明的读者可能会发现，我们在 SJ 定理中给出的附加条件“**规定当局面中所有的单一游戏的 SG 值为 0 时，游戏结束**”过于严格，完全可以替换成“**当局面中所有的单一游戏的 SG 值为 0 时，存在一个单一游戏它的 SG 函数能通过一次操作变为 1**”。

笔者为什么要将限制条件设制成这样？

因为笔者发现这样可以出题，我们可以将题目模型设成这样：游戏中存在一个按钮，游戏双方都可以触动按钮，当其中一个人触动按钮时，触动按钮的人每次必须移动对方上次移动的棋子。如果触动按钮的人能保证他能够使得对方无路可走，那么他同样获胜！

2.2 可以将一堆石子分成多堆——Multi-SG 游戏

遇到这种情况是我们该怎么办呢？

可能聪明的读者马上就会想到，可以通过将 SG 函数适当变形来解决这类问题。

您的想法完全正确!!!

我们先来定义 Multi-SG 游戏。

[定义]

- Multi-SG 游戏规定，在符合拓扑原则的前提下，一个单一游戏的后继可以为多个单一游戏。
- Multi-SG 其他规则与 SG 游戏相同。

我们只需证明，我们仍然可以用 SG 函数来定义局面。

这个证明很简单，因为局面在游戏树中满足拓扑关系，我们可以根据拓扑关系用数学归纳法来做。因为前面已经用数学归纳法证明过一个定理，因此这个定理的证明我们就留给聪明的读者了。

2.3 每一个可以移动的棋子都要移动——Every-SG 游戏

如果每一个可以移动的棋子都要移动，我们应该怎么办呢？

聪明的读者肯定能够想到这样一个策略：对于我们可以赢的单一游戏，我们一定要拿到这一场游戏的胜利!!

所以，我们只需要考虑如何让我们必胜的游戏尽可能长的玩下去。

但是对手却不希望他必败的单一游戏玩的太久，这就是 Every-SG 游戏不同于其他 SG 游戏的地方：一般的 SG 游戏只有胜与负之间的博弈，而 Every-SG 游戏又添加了长与短之间的博弈，这使得 Every-SG 游戏更有嚼头，更有味道。

我们先来定义 Every-SG 游戏。

[定义]

- Every-SG 游戏规定，对于还没有结束的单一游戏，游戏者必须对该游戏进行一步决策；
- Every-SG 游戏的其他规则与普通 SG 游戏相同

我们不难想到如下解法：

在通过拓扑关系计算某一个状态点的 SG 函数时（事实上，我们只需要计算该状态点的 SG 值是否为 0），对于 SG 值为 0 的点，我们需要知道最快几步能将游戏带入终止状态，对于 SG 值不为 0 的点，我们需要知道最慢几步游戏会被带入终止状态，我们用 $step$ 函数来表示这个值。

$$step(v)=\begin{cases}0 & v\text{为终止状态}\\ \max\left(step(u)\right)+1 & SG(v)>0\wedge u\text{为}v\text{的后继状态}\wedge SG(u)=0\\ \min\left(step(u)\right)+1 & SG(v)=0\wedge u\text{为}v\text{的后继状态}\end{cases}$$

[定理]

对于 Every-SG 游戏先手必胜当且仅当单一游戏中最大的 $step$ 为奇数。

我们要证明解法的正确性，需要证明三点：

- 对于所有的单一游戏，先手必胜状态的 $step$ 值为奇数，先手必胜状态的 $step$ 值为偶数。
- 设最大的 $step$ 为 $step\_\max$，那么胜手可以保证该单一游戏最少会在 $step\_\max$ 步结束。
- 设最大的 $step$ 为 $step\_\max$，那么胜手可以保证所有他必败游戏最多在 $step\_\max$ 步结束。

[证明一]（用数学归纳法）

1．所有的终止状态的 $step$ 值为 0，为先手必败状态。

2．假设状态树中某些状态点已经符合要求。

我们找后继状态点已经全部被证明的状态点。

如果它是先手必败状态，那么它的后继状态都为先手必胜状态，后继状态的 *step* 值全为奇数，所以该状态点的 *step* 值为偶数。

如果它是先手必胜状态，那么它的后继状态中有先手必败状态，且它所有的先手必败的后记状态的 *step* 值为偶数，所以该状态点的 *step* 值为奇数。

■

[证明二]

我们设 *step* 最大的单一游戏为 A（如果有多个的话任取一个），最终的胜手为 W。

W 总在 A 游戏处在先手必胜状态时去移动 A 的状态，且 W 可以保证他最多将该游戏的 *step* 值减小 1。 ①

对手总在 A 游戏处在先手必败状态时去移动 A 的状态，且对手最多将该游戏的 *step* 值减小 1。 ②

由①②得，J 可以保证 A 游戏最少会在 $step\_\max$ 步结束。

■

[证明三]

我们设 *step* 最大的单一游戏为 A（如果有多个的话任取一个），最终的胜手为 W。我们考虑除 A 外的任意一个他必败的单一游戏 B。

J 在每一回合都可以将 B 的 *step* 值减少 1，将 B 带入先手必胜状态，

对手必定将 B 的 *step* 至少减少 1，所以 J 可以保证 B 游戏最多会在**错误!**

未找到引用源。步结束。■

● Chapter 3

3.1 翻硬币游戏

一般的翻硬币游戏的规则是这样的：

- N 枚硬币排成一排，有的正面朝上，有的反面朝上。我们从左开始对硬币按 1 到 N 编号。
- 游戏者根据某些约束翻硬币（如：每次只能翻一或两枚，或者每次只能翻连续的几枚），但他所翻动的硬币中，最右边的必须是从正面翻到反面。
- 谁不能翻谁输。

有这样的结论：局面的 SG 值为局面中每个正面朝上的棋子单一存在时的 SG 值的异或和。

图二

[证明]（数学归纳法）

我们先确定数学归纳的顺序。对于任何一个正面朝上的硬币，我们设它的分值为 2^K，（它为此从左数第 K 枚硬币），一个局面的分值为所有正面朝上的硬币的分值和。

则我们可以知道，对于任意一个局面，它的所有后继局面的分值小于它。

我们以局面的分值作为归纳顺序。

1.分值为 0 和 1 的局面符合要求。（对应只有一枚硬币的情况，涉及不到组合问题）

2.假设分值小于等于 K 的局面符合要求。我们证明分值为(K+1)的局面符合要求。

对于分值为(K+1)的局面，我们考虑它的某一次决策，我们可以认为最右边的改动位是去掉了一个正面朝上硬币，其他改动位是添加了一个正面朝上硬币（因为某一位有两个正面朝上的硬币和没有正面朝上的硬币是等价的——SG 值等价，胜负判定等价）。这样，我们可以将决策看成去掉了某一堆石子（最右边的改动位），添加了一个它的后继石子堆（其他改动位）。这样，它的决策与 NIM 游戏完全等价。

之后的证明就与 NIM 游戏的证明十分类似，由于篇幅原因，这里从略。相信聪明的读者自己可以完成。

3.2 无向图删边游戏

3.2.1 树的删边游戏

规则如下：

- 给出一个有 N 个点的树，有一个点作为树的根节点。
- 游戏者轮流从树中删去边，删去一条边后，不与根节点相连的部分将被移走。
- 谁无路可走谁输。

我们有如下定理：

[**定理**]

叶子节点的 SG 值为 0；中间节点的 SG 值为它的所有子节点的 SG 值

加 1 后的异或和。

[证明]（数学归纳法）

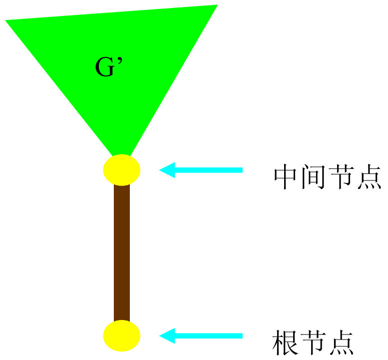
1.一个节点和两个节点的情况显然成立。

2.我们假设小于 K 个节点的任意情况均成立，下面证明（K+1）个节点的情况也成立。我们将证明分成两部分：（1）证明根节点只有一个孩子的情况符合要求；（2）证明根节点有多个孩子的情况符合要求。

先证明第一部分：

我们假设树 *G* 的根为 A，A 只与 B 相连，图中共有 N+1 各节点，去掉 A 后以 B 为根节点的图为 G’（见图三），下面证明

$$SG(G)=SG(G')+1$$



G 图

图三

若我们去掉 AB 之间的边，则所有的边都被删除，

∴G 存在 SG 值为 0 的后继局面； ①

若我们去掉 G 中的除 AB 外的边 E，则删除后总边数小于等于 K。

设以 B 为根的 G’ 去掉 E 以后的后继局面的 SG 值为 P

∵以 A 为根的 G 去掉 E 以后图中的总边数小于等于 K

又∵中间节点的 SG 值为它的所有子节点的 SG 值加 1 后的异或和

∴A 为根的 G 去掉 E 以后的后继局面的 SG 值为 P+1

∵以 B 为根的 G’ 可以通过去边操作使得后继局面的 SG 值变为 0

到 $SG(G')-1$

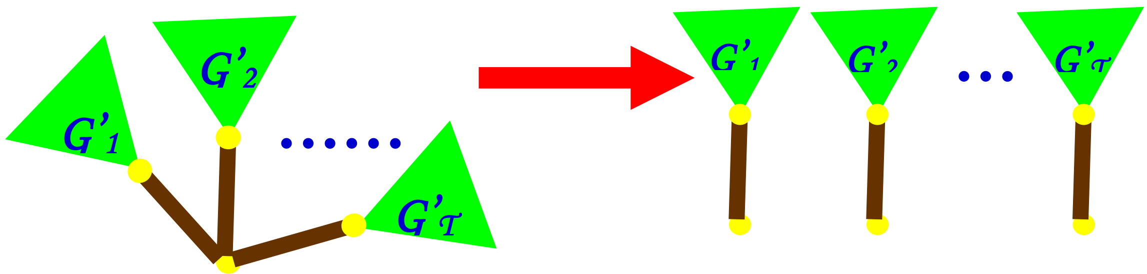
∴以 A 为根的 G 可以通过删除 G’中有的边使得后继局面的 SG 值变为 1 到 $SG(G')$ ②

由①②得，$SG(G)=SG(G')+1$

再证明第二部分：

我们假设树 G 的根为 A，A 与 T 个节点相连，为 B_1、B_2、…、B_T，设去掉(T-1)个与 A 相连的边（AB_X 保留）后，以 A 为根的树为 G_X，第二部分即证明

$$SG(G)=SG(G_1')\oplus SG(G_2')\oplus......\oplus SG(G_T')$$



图四

聪明的读者可能会发现，我们已经将游戏变成了 NIM 游戏！

G 是总游戏，G_1、G_2、……、G_T 分别是 T 堆石子。

3.2.2 Christmas Game(PKU3710)

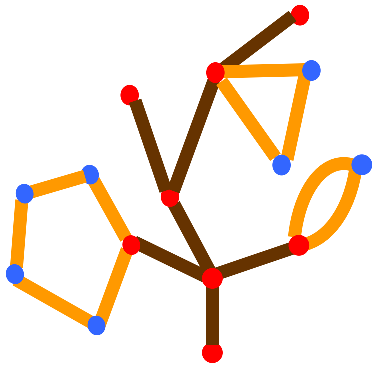
题目大意：

- 有 N 个局部联通的图。
- Harry 和 Sally 轮流从图中删边，删去一条边后，不与根节点相连的部分将被移走。Sally 为先手。
- 图是通过从基础树中加一些边得到的。
- 所有形成的环保证不共用边，且只与基础树有一个公共点。
- 谁无路可走谁输。

这道题与我们上一节所讲的内容基本相同，唯一不同的是图中出现了环！

环的处理成为了解题的关键！！

我们来分析环的性质：环保证不共用边，且只与基础树有一个公共点。因此题中所有的环都是从树中某一个点连出又连回同一个点的简单环！！（见图五）



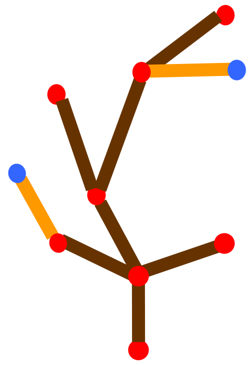
图五

我们通过分析发现了如下奇妙的性质：

（1） **对于长度为奇数的环，去掉其中任意一个边之后，剩下的两个链长度同奇偶，抑或之后的 SG 值不可能为奇数，所以它的 SG 值为 1；**

（2） **对于长度为偶数的环，去掉其中任意一个边之后，剩下的两个链长度异奇偶，抑或之后的 SG 值不可能为 0，所以它的 SG 值为 0；**

所以我们可以去掉所有的偶环，将所有的奇环变为长短为 1 的链。(见图六)



图六

这样的话，我们已经将这道题改造成了上一节的模型！！！

算出每一棵树的 SG 值之后，再按 NIM 游戏异或即可。

3.2.3 无向图的删边游戏

我们将 Christmas Game 这道题进行一步拓展——去掉对环的限制条件，这个模型应该怎样处理？

无向图的删边游戏：

- 一个无相联通图，有一个点作为图的根。
- 游戏者轮流从图中删去边，删去一条边后，不与根节点相连的部分将被移走。
- 谁无路可走谁输。

对于这个模型，有一个著名的定理——Fusion Principle。

[定理]

我们可以对无向图做如下改动：将图中的任意一个偶环缩成一个新点，任意一个奇环缩成一个新点加一个新边；所有连到原先环上的边全部改为与新点相连。这样的改动不会影响图的 SG 值。

这个原理的证明十分复杂，限于篇幅原因，这里略掉不讲，有兴趣的同学可以参见 Winning Ways，Chapter 7[3]。

这样的话，我们可以将任意一个无向图改成树结构，“无向图的删边游戏”就变成了“树的删边游戏”。

[3] 《Winning.Ways.for.Your.Mathematical.Plays.V1》Chapter 7 ， P193

参考文献

- 《GAME THEORY》from Thomas S. Ferguson
- 《由感性认识到理性认识——透析一类搏弈游戏的解答过程 》，张一飞，国家集训队 2002 论文
- 《解析一类组合游戏》，.王晓珂，国家集训队 2007 论文
- 《浅析解 “对策问题” 的两种思路》，骆骥，国家集训队 2002 论文
- 《Winning.Ways.for.Your.Mathematical.Plays.V1》
- 《游戏策略》from 朱全民老师

附录

组合游戏习题：

- 《Strips》 from POI2000
- 《Christmas Game》 from PKU3710
- 《Georgia and Bob》 from PKU1704
- 《Crosses and Crosses》 from PKU3537
- 《KNIGHT》 from CEOI2008
- 《NIM》 from PKU2608
- 《NIM》 from PKU2975
- 《S-NIM》 from PKU2960
- 《2D-NIM》 from PKU1021
- 《I Love this Game》 from PKU1678