NOIP2016 模拟赛 Solution

1.平均数

40%的数据：

通过前缀和计算出所有区间的平均值，然后排序输出第 k 小的平均值即可，时间复杂度 $O(n^2logn)$。

100%的数据：

第 k 大不易直接求，我们想到二分，则原问题转变为求区间平均值小于 x 的区间数量。考虑把序列中的每个数减去 x，则我们只需求区间和小于 0 的区间数量。我们对这个序列求前缀和，则区间[l,r]和小于 0 当且仅当 $S_{l-1} > S_r$，答案即为前缀和序列 S 的逆序对数量，使用经典的归并排序即可解决，时间复杂度 $O(nlog^2n)$。

2.涂色游戏

20%的数据：

搜索所有可能的涂色方案并判断是否符合条件，复杂度 $O(p^{nm})$。

另外 20%的数据：

容易看出，每一列的涂色方案数仅与上一列有关，因此我们可以按列为阶段进行 dp。我们将一列的状态压缩，然后预处理出每两个状态之间的转移是否合法，然后直接 dp 即可。状态数 p^n，时间复杂度 $O(m*p^{2n})$。

另外 30%的数据：

沿用上一个部分分的思路：按列为状态 dp。我们发现，如果固定一列所用的颜色集合，则每一种涂色方案本质上都是等价的。更进一步地，如果固定一列所用的颜色数，则所有可能的颜色集合的方案数都是相等的。也就是说，我们可以用一列所用的颜色数作为状态。

首先我们需要算出一列使用 j 种颜色的方案数，可以使用 dp。设 f[i][j]为 i 个格子恰好涂 j 种颜色的方案数，则

f[i][j]=f[i-1][j-1]*(p-(j-1))+f[i-1][j]*j

接下来，我们考虑计算固定某一列的涂色方案，且这一列共用了 j 种颜色，那么下一列用 k 种颜色的合法方案数。我们设 g[j]表示一列使用 j 种颜色的方案数，则一列涂上每种 j 元颜色集合的颜色方案数为 $\frac{g[j]}{C_p^j}$。而对于这一列的一种确定涂色方案（用了 j 种颜色），下一

列用的 k 元颜色集合方案数为 $\sum_{x=\max(q,j,k)}^{\min(p,j+k)} C_j^{j+k-x} C_{p-j}^{x-j}$

（枚举的 x 为两列的颜色集合的并的大小）。

据此，我们可以写出如下的 dp 方程：

设 dp[i][j]表示前 i 列最后一列共有 j 种颜色的方案数，则

dp[i][k]=dp[i-1][j]*trans[j][k]，其中

trans[j][k]= $\frac{g[k]}{C_p^k} \sum_{x=\max(q,j,k)}^{\min(p,j+k)} C_j^{j+k-x} C_{p-j}^{x-j}$

初值 dp[1][j]=g[j]。

时间复杂度 $O(n^2m+n^3)$。

100%的数据：

把转移用矩阵快速幂优化即可，时间复杂度 $O(n^3\log m)$。

3.序列

20%的数据：

对于每次修改重新计算所有询问的答案，复杂度 $O(qn^2)$。

40%的数据：

由于每次修改只会影响一个数，所以可以在每次修改之后直接考虑这次修改对每个询问的影响，这样每次修改之后更新答案的复杂度变成 $O(m)$，总时间复杂度为 $O((q+n)m)$。

100%的数据：

仍然考虑每次修改对询问的影响。我们发现每次修改之后答案的变动取决于所有包含该点的询问，则我们只需快速计算一个数对询问的贡献即可。我们将一个询问拆成 2 个后缀询问相减，则所有产生贡献的询问即左端点小于等于修改点且询问的 x 小于等于修改值的询问，这是一个经典的二维数点问题，由于要求强制在线，所以可以使用可持久化线段树解决。