基于线性代数的一般图匹配算法

ZYQN

成都石室中学

zyqn1227@gmail.com

2017 年 2 月 17 日

目录

1. 背景介绍
2. 算法介绍
   - Tutte 定理
   - 求解最大匹配数： $O(n^3)$
   - 输出方案： $O(n^5)$
   - 输出方案： $O(n^4)$
   - 输出方案： $O(n^3)$
3. 总结
4. 简单例题
5. 参考资料

基本的一般图匹配问题

给定 n 个点，m 条边。问最多选出多少条边，使得选出的边集种两两之间没有公共点

一般来讲，$n \leq 500, m \leq n^2$

带花树算法

带花树算法（Blossom algorithm），就是用于解决一般图匹配问题

现在来看看带花树的基本实现：

带花树算法

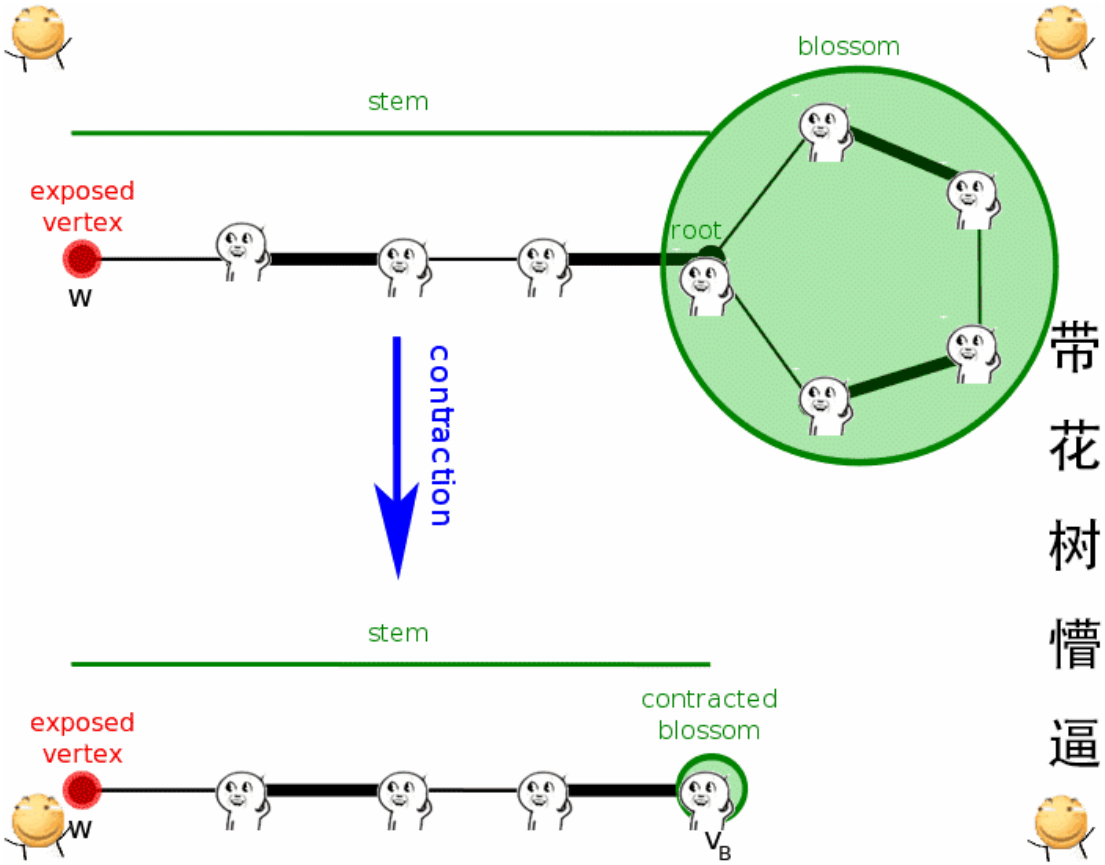
带花树算法（Blossom algorithm），就是用于解决一般图匹配问题

现在来看看带花树的基本实现：

欸，图片放错了，放成了带花树的爸爸

带花树算法

要带懵逼和滑稽的带花树才正宗（雾



其主要思想类似于网络流

仍然是寻找增广路，偶尔缩缩环什么的

带花树算法的优劣

带花树算法可以支持带权

而且时间复杂度为 $O(nm)$，且这个上界很松

是一个非常优秀的算法

不过因为其代码细节较多（很容易写错）

算法的代码非常长

正确性的证明非常复杂

所以其至今仍然没有在国内普及

一个新的解决方案

今年 WC 上，周子鑫、杨家齐两位神犇在营员交流的时候又为我们引入了一个新的算法

这种算法类似于矩阵树定理，将图论与线性代数相结合

兼顾了时间复杂度、编程复杂度以及学习的门槛

前置技能只需要“高斯消元”一项即可

下面我们就来学习这个算法

一点说明

正式开始之前，做一点说明：

这是一个普及向的 PDF，所以我会尽量避免深入讨论线性代数的相关内容

因此很多相关定理在这里都没有证明

不过这并不影响大家使用该算法做题

如果有同学对定理的证明非常感兴趣，那么参考资料中的文献一定能够满足你对于知识的渴望

Tutte 矩阵

对于一个无相图 $G(V,E)$，设 $|V| = n$，我们开一个 $n \cdot n$ 的矩阵 A 对于其中的每一个元素，我们做如下定义：

$$\mathrm{A}_{i,j} = \begin{cases} x_{ij} & (i,j) \in E \text{ and } i < j \\ -x_{ij} & (i,j) \in E \text{ and } j < i \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

其中 $x_{i,j}$ 是变量。不难看出, 共有 $|E|$ 个变量

Tutte 定理

图 G 有完美匹配，当且仅当其 Tutte 矩阵的行列式不为零

换一句话来说，它的 Tutte 矩阵满秩

再换一句话说，它的 Tutte 矩阵线性无关

Tutte 定理的基本应用

线性无关？线性基！

找到一个图的最大匹配 $\Leftrightarrow$ 找到一个最大的子图，使其存在完美匹配 $\Leftrightarrow$ 求原图的 Tutte 矩阵的一个极大子矩阵，使其线性无关

于是对原图的 Tutte 矩阵求一发线性基就可以了

求线性基大家都会吧？

就是高斯消元搞一搞

时间复杂度：$O(n^3)$

一点小问题

我们定义的 Tutte 矩阵里的元素不是常量

什么？你只会全是常量的高斯消元？

一点小问题

我们定义的 Tutte 矩阵里的元素不是常量

什么？你只会全是常量的高斯消元？

我也只会全是常量的高斯消元 QwQ

那我们就给每个变量在模意义下随机一个值吧！

可以证明，如果我们随机的域的大小为 S，其出错的概率不会高于 $\frac{n}{S}$

一般的题目中，$n \leq 500$, 而我们可以取模数为 1e9+7

于是出错的概率不超过 $\frac{1}{1e6}$，这是可以接受的

解决小问题的感想

怎么样？

我们刚刚才学习了 Tutte 定理，我们就可以求出最大匹配数了

是不是感觉很简单?

输出方案 • $O(n^5)$

现在考虑如何输出方案

我们先考虑一个 naive 的算法

先用高斯消元得到一个极大的满秩子矩阵

然后枚举每一条边，看删掉这条边的两个端点后，剩下的图还有没有完备匹配

这样直接做是 $O(n^2 \cdot n^3)$ 的

优化 naive 的算法

考虑刚才的算法，每枚举一条边，我们就得计算一次行列式

这实在是太不优雅了

于是我们针对这个问题进行优化

一个小定理

对于一个有完美匹配的图 G，其 Tutte 矩阵为 A

在去掉 i 号点和 j 号点后仍然有完备匹配的充要条件为 $A^{-1}_{i,j} \neq 0$

这里 A^{-1} 表示 A 的逆矩阵

不同于多项式求逆，矩阵的求逆非常方便

使用高斯消元可以在 $O(n^3)$ 的时间复杂度内求解

使用定理进行优化

有了刚才那个定理，我们可以非常方便的判定一条边是否在最大匹配中了

矩阵求逆之后判断一下对应的格子是否为 0 即可

使用定理进行优化

有了刚才那个定理，我们可以非常方便的判定一条边是否在最大匹配中了

矩阵求逆之后判断一下对应的格子是否为 0 即可

于是我们每一次找一条在最大匹配中的边，将其两个端点删掉

之后对矩阵重新求逆

如此往复，直到所有点都被删掉即可

时间复杂度：$O(n^4)$

分析复杂度瓶颈

我们看一看现在的算法

发现总共会对矩阵求 n 次逆

但我们发现每一次的矩阵虽然不同，但变化非常小（只有两行两列变成了 0）

于是我们就可以用一些膜法来维护逆矩阵，而不是每一次重新求

最终进化

我们再来看一个定理：

若 $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & v^T \\ u & B \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{1,1} & \hat{v}^T \\ \hat{u} & \hat{B} \end{pmatrix}$ 且 $a_{1,1} \neq 0$

则 $B^{-1} = \hat{B} - \frac{\hat{u}\hat{v}^T}{a_{1,1}}$

最终进化

我们再来看一个定理：

若 $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & v^T \\ u & B \end{pmatrix}$，$A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{1,1} & \hat{v}^T \\ \hat{u} & \hat{B} \end{pmatrix}$ 且 $a_{1,1} \neq 0$

则 $B^{-1} = \hat{B} - \frac{\hat{u}\hat{v}^T}{a_{1,1}}$

考虑刚刚删掉矩阵中一个点，不就是删去一行一列吗？

于是我们每一次删点就使用这个公式去删

这样的话，单次删点复杂度 $O(n)$，删点部分总复杂度 $O(n^2)$

再算上矩阵求逆和求极大满秩子矩阵的话，总时间复杂度:$O(n^3)$

长舒一口气

至此，我们已经能在 $O(n^3)$ 的时间复杂度内解决一般图匹配啦！

而且，这个算法真的不容易写错！

以后再也不怕出题人用一般图匹配来搞事情啦！

总结

现在让我们来回忆一下整个算法的流程：

i. 生成 Tutte 矩阵 A

ii. 使用高斯消元求出其极大满秩子矩阵 $\hat{A}$

iii. 使用高斯消元求出 $\hat{A}$ 的逆矩阵 $\hat{A}^{-1}$

iv. 重复一下步骤，直到所有点均被匹配

   1) 找到一条在最大匹配中的边 (i,j)

   2) 在逆矩阵中将其删去

代码实现上的优化

在代码实现上，还有一些 Trick：

1. 遍历矩阵的时候挂一个链表
2. 模数使用 998244353
3. 随机种子使用 19260817 (雾

简单例题

讲了一个新算法，还是来看一看相关的题目吧

我们来讨论三个题目：

1. SEAGRP
2. Boke and Tsukkomi
3. 挑战 NPC

SEAGRP

给定一个 n 个点，m 条边的无向图。

请你判定是否存在一种删边方式，使得每一个点的度数均为 1

$T \leq 10$

$1 \leq n, m \leq 100$

题目来源：CodeChef JAN14 SEAGRP

Boke and Tsukkomi

给定一个无向图。请你求出哪些边不可能出现在最大匹配当中

$n \leq 40$

$m \leq 123$

题目来源：HDU 4687

挑战 NPC

有 n 个球，用整数 1 到 n 编号。还有 m 个筐子，用整数 1 到 m 编号。每个筐子最多能装 3 个球。

每个球只能放进特定的筐子中。具体有 e 个条件，第 i 个条件用两个整数 v_i 和 u_i 描述，表示编号为 v_i 的球可以放进编号为 u_i 的筐子中。

每个球都必须放进一个筐子中。如果一个筐子内有不超过 1 个球，那么我们称这样的筐子为半空的。

求半空的筐子最多有多少个，以及在最优方案中，每个球分别放在哪个筐子中。

$m \leq 100, n \leq 3m$

题目来源：WC2016

参考资料

[1] Mucha M, Sankowski P. Maximum matchings via Gaussian elimination

[2] 周子鑫, 杨家齐《基于线性代数的一般图匹配》

[3] 吕凯风《挑战 NPC》