基于线性代数的一般图匹配算法·摘要

一、 背景介绍

去年 WC，VFK 引进了带花树算法，从而将一般图匹配问题带入了 OI 界。虽然关于一般图匹配的题目还没有如雨后春笋般涌现，但谁能断言一个刚出生的婴儿的未来呢？

与二分图匹配问题一样，一般图匹配也有适用的算法：带花树。该算法不仅能够解决一般图最大匹配问题、带权最大匹配问题。而且一般不会达到时间复杂度的上界。但该算法也有明显不足：代码较长，且细节较多。

作为补充，今年 WC 时周子鑫、杨家齐两位同学为我们带来了基于线性代数的一般图匹配算法。该方法具有编程复杂度低、具有较大优化空间的优点。

以下将简单介绍该算法的证明、代码实现等方面。

二、 相关定理

该算法主要依赖以下三个定理

1. 图 G 有完备匹配$\Leftrightarrow \det \tilde{A}(G) \neq 0$
2. $\left(\tilde{A}^{-1}\right)_{i,j} \neq 0 \Leftrightarrow G-\{v_i, v_j\}$有完备匹配
3. 若 $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & v^T \\ u & B \end{pmatrix}, A^{-1}=\begin{pmatrix} \hat{a}_{1,1} & \hat{v}^T \\ \hat{u} & \hat{B} \end{pmatrix}$且 $\hat{a}_{1,1} \neq 0$，则 $B^{-1}=\hat{B}-\dfrac{\hat{u}\hat{v}^T}{\hat{a}_{1,1}}$

其中“定理 1”为“Tutte 定理”，主要用于将一般图匹配问题转化为线性代数的问题

“定理 2”则用于输出匹配的方案

“定理 3”则用于优化复杂度

这三个定理基本构建了该算法的理论基础。关于这三个定理在 WC 课件中均有详细证明。这里就不展开说明了

三、 算法思路

1. 建立 Tutte 矩阵 A
2. 求出 A 的极大满秩子矩阵 B

   此时，B 的秩等于最大匹配数的两倍
3. 求出该 B 的逆矩阵 B^{-1}
4. 枚举点对，根据”定理 2”判断该点对是否在最大匹配中
   1. 若是，则将该点对加入匹配中，并使用“定理 3”的推广来维护逆矩阵
   2. 若否，则继续枚举

此时我们已经有了最大匹配数和匹配方案了，所求问题也就圆满解决了

四、 算法实现

1. 实际上我们只需要实现一个高斯消元即可求得最大匹配数

   再将高斯消元一个子过程的代码改一改即可维护逆矩阵，进而输出方案了
2. 粗略实现可以参考：http://paste.ubuntu.com/23941184/

该算法可以通过 UOJ 的一般图匹配模板题目

3. 考虑继续优化常数的话，我们还可以通过挂链表等一系列方法来进行优化

   可以参考周子鑫同学的代码：http://uoj.ac/submission/124366

五、 参考资料

1. 基于线性代数的一般图匹配
2. Mucha M, Sankowski P. Maximum matchings via Gaussian