莫比乌斯函数前缀和及其变形

ZYQN

成都石室中学

zyqn1227@gmail.com

2017 年 2 月 20 日

目录

题目描述

求解：

1. $\sum_{i=1}^{n} \mu(i)$
2. $\sum_{i=1}^{n} \mu^2(i)$

数据范围：

第一问:$n \leq 10^9$

第二问:$n \leq 10^{12}$

$\sum_{i=1}^{n} \mu(i)$

你可以杜教筛

但我们有一个数学推导更为简单的算法

$\sum_{i=1}^{n} \mu(i)$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(i) = 1 - \sum_{i=2}^{n} (0 - \mu(i)) = 1 - \sum_{i=2}^{n} (\sum_{j|i} \mu(j) - \mu(i)) = 1 - \sum_{i=2}^{n} \sum_{j|i, i \neq j} \mu(j)$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \cdot (\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor - 1) = 1 - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mu(j) \cdot (\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor - 1)$$

这样的话，我们预处理前 S 个莫比乌斯函数的值

据 PoPoQQQ 讲，复杂度是 $O(\frac{n}{S}\sqrt{n} log_2 \frac{n}{S})$ 的

$\sum_{i=1}^{n} \mu^2(i)$

$$\mu(i)^2 = \sum_{d^2 | i} \mu(d) = \sum_{d=1}^{\sqrt{i}} \mu(d) \cdot \left\lfloor \frac{i}{d^2} \right\rfloor$$

这个的证明似乎没有直接的推导方式?

我只会容斥的证法......

$\sum_{i=1}^{n}\mu^2(i)$ 的证明

我们实际上是要删去所有具有完全平方因子的数

于是我们考虑我们将完全平方因子全部提出来，设为 a^2

于是我们可以枚举 a，然后下底函数分块就可以了

但这样会算重，于是我们容斥

将奇数平方因子的删去，将偶数个的加回来

然后我们惊奇地发现，这货不就是 μ 函数嘛！

于是推出来式子就长那样了

时间复杂度：$O(\sqrt{n})$

相关例题

- http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2440
- http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2986
- http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3994
- http://www.spoj.com/problems/DIVCNT2/