解题报告 · Counting Divisors (square)

ZYQN

成都石室中学

zyqn1227@gmail.com

2017 年 2 月 21 日

目录

题目大意

求 $\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2)$

$T \leq 10000$

$1 \leq n \leq 10^{12}$

空间限制：1536MB

时间限制：20s

初步想法

想必大家都知道这个结论：

$$d(xy)=\sum_{i|x}\sum_{j|y}[gcd(i,j)=1]$$

至于这个结论的证明，似乎只能用容斥来证明

由此可见，除数函数可以尝试从组合意义上化简

观察性质

设 n 的质因数分解为：$p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$

则 $d(n^2) = \prod_{i=1}^{k}(2a_i+1) = \sum_{S\subseteq\{1,2,\dots,k\}} 2^{|S|}\cdot\prod_{i\in S} a_i$

再化简一下便可得到：$d(n^2)=\sum_{i|n} 2^{\omega(i)}$, 其中 $\omega(i)$ 为 d 的不同质因子个数

不难发现 $2^{\omega(i)}$ 实际上是枚举了 squre free 的因数

于是可以得到：$d(n^2)=\sum_{i|n}\sum_{j|i}\mu(j)^2$

数学推导

现在我们来化简原式：

$$\sum_{i=1}^{n} d(i^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j|i}\sum_{k|j}\mu(k)^2 = \sum_{k=1}^{n}\mu(k)^2\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor} d(\left\lfloor\frac{n}{kj}\right\rfloor)$$

设 $f(x) = \sum_{i=1}^{x}\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$

则 $\sum_{k=1}^{n}\mu(k)^2\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor} d(\left\lfloor\frac{n}{kj}\right\rfloor) = \sum_{k=1}^{n}\mu(k)^2\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\lfloor\frac{n}{ki}\rfloor = \sum_{k=1}^{n}\mu(k)^2\cdot f(\lfloor\frac{n}{k}\rfloor)$

时间复杂度分析

其中 $\sum_{i=1}^{n} \mu(i)^2$ 可用 BZOJ 2986 的方法做到 $\sqrt{n}$ 的时间复杂度内单点求值

而 $f(n)$ 也显然可以使用下底函数分块在 $\sqrt{n}$ 的时间复杂度内单点求值

在我们预处理 $n^{\frac{2}{3}}$ 内的所有答案的前提下

单次询问的复杂度为：$O(n^{\frac{2}{3}})$

参考资料

[1] http://www.cnblogs.com/clrs97/p/5986557.html

[2] http://gintoki.leanote.com/post/ SPOJ DIVCNT2

[3] http://www.cnblogs.com/qzqzgfy/p/5600088.html