

lydsy Monthly, May 2017

解题报告

2017 年 5 月 5 日

1 挑战 NP-Hard

考虑尝试对图进行贪心染色，设 $col[i]$ 表示 i 点的颜色，dfs 这个图，设 $mex(S)$ 表示最小的没出现在集合 S 中的正整数，则 $col[x] = mex\{col[y]\}$ ，其中 x 与 y 有边，且 y 已被染过色。

若 $\max(col[i]) \leq k$ ，那么 k 染色问题就解决了；否则随便选一个颜色是 $k+1$ 的点，按照颜色递减走，一定可以走出一条边数为 k 的简单路径。

时间复杂度 $O(n+m)$ 。

2 失控的数位板

考虑每个格子：

- 若没被走过，但要求有颜色，那么此时必定无解。
- 若被走过，但要求没有颜色，那么只要在它最后一次被走过之前坏掉即可。
- 若被走过，且要求有颜色，那么只要在它最后一次被走过之后坏掉即可。

求出每个格子最后一次被走过的时间，可以倒序操作，用并查集维护。

时间复杂度 $O(hw\alpha(hw))$ 。

3 排名的战争

以 1 号点为原点建立坐标系，那么一对参数的答案对应一个半平面内的点数。

把所有点极角排序，然后双指针枚举半平面即可。

时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

4 线段游戏

若线段 i 和 j 相交，那么在它们之间连一条边。若这个图不是二分图，那么无解，否则令 cnt 为连通块个数，那么 $ans = 2^{cnt}$ 。

在二分图染色的过程中，每个点只需要被访问一次。对于当前所在的点 x ，它可以一步走到 $[1, x]$ 里 $p[i] > p[x]$ 的所有 i ，以及 $(x, n]$ 里 $p[j] < p[x]$ 的所有 j 。用线段树维护所有没走过

的点，记录每个区间 p 最小与最大的两个位置。每次贪心取出最大/小的，看看是否满足条件，若满足则删除该点，然后递归染色，否则终止。

时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

5 卡常生成树

观察模数 2333333 可以发现权值的循环节不会很大，大约是 50 的级别。

考虑暴力状压 DP，设 $f[i][mask]$ 表示考虑前 i 个点，最后 5 个点的连通性为 $mask$ 时的最小代价，那么 $f[i][0] - f[i-1][0]$ 的循环节也必然不会很大。暴力找到循环节，跳过循环节，最后零碎部分再暴力 DP 即可。

6 棋盘上的守卫

将每行看成一个点，每列也看成一个点，在第 i 行与第 j 列之间连一条边权为 $w[i][j]$ 的边，那么就得到了一个 $n + m$ 个点的图。

根据题目的限制，对于任意 n 个点的集合，都只能最多选择 n 条边。因此在最后方案里，这个图是若干个连通块，每个连通块是树或者是环套树。

那么问题就转化为了最小生成环套树森林，Kruskal 即可。

时间复杂度 $O(nm \log(nm))$ 。

7 太空猫

$f[i][0/1]$ 表示横坐标为 i ，重力方向为下/上时的最小代价，转移显然。

需要注意的是整个图不连通时也是无解的。

时间复杂度 $O(n)$ 。

8 长方体

最远点对必然包含至少一个顶点。枚举一个顶点，然后枚举一个面，在那个面上三分套三分即可。

9 叠塔游戏

严格递增的条件是没用的，等价于给每个矩形确定一个独一无二的底边长，最大化高的和。

对于每个矩形 (a, b) ，在 $a - b$ 之间建一条边，若方向是 $a - > b$ 则代表底边是 a ，高是 b ，那么一组可行解中每个点最多只有一条出边。

考虑每个连通块，首先每个点会贡献 $(deg[i] - 1) \times val[i]$ ，其次若这个连通块是棵树，那么选取 val 最大的点作为根可以额外得到 val 的收益。

时间复杂度 $O(n \log n)$ 。